Es. 1: (1) Se C è la camera fondam., $-C$ è una camera di Weyl. allora $\exists\, w_0 \in W \mid w(C) = -C$.

(2) $w_0^2(C) = w_0(-C) = -w_0(C) = C$

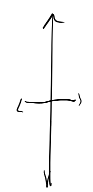
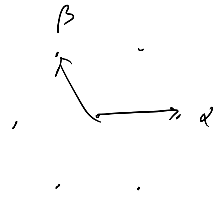
(3) Sia $w \in W$ che è scrivibile come prodotto di elt di $\Delta \setminus \{\alpha\}$.

Allora $w(\alpha) \in \alpha + \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\Delta \setminus \{\alpha\})$ è positiva.

(4) Scriviamo $w_0 = W \cdot \overset{w^{-1}w_0}{\overset{\shortparallel}{z}}$ e studiamo la lunghezza di W. Sappiamo che w_0 cambia segno a tutte le rad. >0, e che z cambia segno a $\ell(z)$ radici positive. Nessuna rad. pos. può cambiare segno due volte, una dopo z e una dopo W. Quindi

- quelle $\overset{>0}{}$ che cambiano segno dopo z rimangono negative
- quelle che sono rimaste positive dopo z sono esattamente quelle che vanno in negative dopo anche W.

Segue: $\ell(w_0) = \ell(w) + \ell(z)$.

(5)  $s_\alpha s_\beta$ 

$s_\alpha s_\beta s_\alpha$

$B_2 : s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta$

$G_2 : (s_\alpha s_\beta)^3$.

$w_0 = s_\alpha s_\beta s_\alpha \dots$, # volte pari a $|\Phi^+|$

Es. 2: $w = s_1 \cdots s_u = r_1 \cdots r_t$ cioè $s_1 \cdots s_u\, r_t \cdots r_1 = e$

Lemma di cancellazione: posso eliminare queste riflessioni due a due, conservando lo stesso elem. $= e$.

Altra dim.: $(-1)^u = \det(w) = (-1)^t$

Es. 3,4,5: /

Es. 6: 1) $w = s_1 \cdots s_t = \underbrace{s_1 \cdots s_i}_{\text{lunga } i} \cdot \overbrace{s_{i+1} \cdots s_t}^{\text{lunga } t-i+1}$, $t = \ell(w)$ (se fossero più corte, potrei accorciare w)

2) Per il lemma di cancellazione, sappiamo già che $w(\alpha_t) < 0$.
Segue: $ws_t(\alpha_t) > 0$, quindi α_t non è fra le radici che cambiano segno con ws_t.

Per induzione: $\{\gamma_j = (s_{t-1} \cdots s_{j+1})(\alpha_j) \mid j \in \{1, \ldots, t-1\}\} = \{$radici >0 che camb. segno con $ws_t\}$

Sono tutte diverse, perché ws_t ha lunghezza $t-1$, e sono diverse da α_t perché α_t non cambia segno dopo ws_t. Quindi:

$$s_t(\gamma_j) > 0, \quad e \quad w(s_t(\gamma_j)) < 0 \quad \forall j$$

Segue: $\{s_t(\gamma_j)\}$ sono $\ell(w)-1$ radici pos. che camb. segno con w. Rimane α_t, e abb. finito.

Es. 7: $\alpha^\vee = \frac{2(\alpha, -)}{(\alpha,\alpha)}$ $\quad \alpha^* = (\alpha, -)$, $\quad \alpha^\vee = \frac{2\alpha^*}{(\alpha,\alpha)}$, $\quad (\alpha^*, \beta^*) = (\alpha, \beta)$

$$(\alpha^\vee, \alpha^\vee) = \left(\frac{2\alpha^*}{(\alpha,\alpha)}, \frac{2\alpha^*}{(\alpha,\alpha)}\right) = \frac{4}{(\alpha,\alpha)^2}(\alpha^*, \alpha^*) = \frac{4}{(\alpha,\alpha)}$$

$$(\alpha^\vee)^\vee = \frac{2(\alpha^\vee, -)}{(\alpha^\vee, \alpha^\vee)} = \frac{\cancel{2}(\cancel{\alpha,\alpha})}{4} \cdot \frac{\cancel{2}(\alpha^*, -)}{\cancel{(\alpha,\alpha)}} = (\alpha^*, -) = \alpha$$

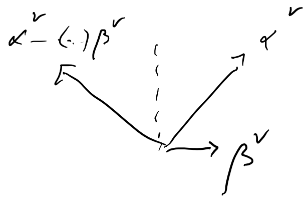
$$\langle \beta^\vee, (\alpha^\vee)^\vee \rangle = \langle \beta^\vee, \alpha \rangle$$

(la matr. di Cartan di $\Phi^\vee$ è la trasposta della matr. di Φ. Segue: il diagr. di Dynkin di $\Phi^\vee$ è lo stesso, con frecce invertite!)

(1 a) Assiomi di sist. di radici per $\Phi^\vee$:

1) $\Phi^\vee$ genera E^*, $0 \notin \Phi^\vee$: <u>ok</u>

2) $\mathbb{Z}\alpha^\vee \cap \Phi^\vee = \{\alpha^\vee, -\alpha^\vee\}$: <u>ok</u>



3) $$\alpha^\vee - \langle \alpha^\vee, (\beta^\vee)^\vee \rangle \beta^\vee = \alpha^\vee - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \beta^\vee$$

$$\stackrel{?}{=} (\alpha - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \beta)^\vee$$

$$\alpha^\vee - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \beta^\vee = \frac{2\alpha^*}{(\alpha,\alpha)} - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \frac{2\beta^*}{(\beta,\beta)} =$$

$$\frac{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}{(\alpha,\alpha)} = \frac{\langle \alpha^\vee, \beta \rangle}{(\beta,\beta)}$$

$$= \frac{2\alpha^*}{(\alpha,\alpha)} - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \frac{2\beta^*}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2(\alpha^* - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \beta)}{(\alpha,\alpha)} =$$

$$= (\alpha - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \beta)^\vee :$$ <u>ok</u>

4) $$\frac{2(\alpha^\vee, \beta^\vee)}{(\alpha^\vee, \alpha^\vee)} \in \mathbb{Z} \ ?$$

$$\|$$

$$\frac{2\left(\frac{\cancel{2}\alpha^*}{\cancel{(\alpha,\alpha)}}, \frac{\cancel{2}\beta^*}{(\beta,\beta)}\right)}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{(\alpha,\alpha)}}} = \frac{2(\alpha^*, \beta^*)}{(\beta,\beta)} = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$$: <u>ok</u>

(1 b) $\Delta^\vee$ base di $\Phi^\vee$:

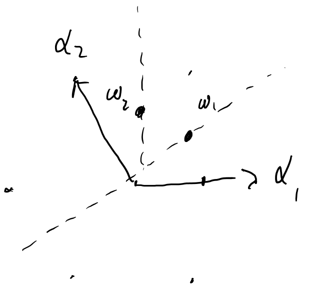
$$\Phi \ni \beta = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha \qquad \beta^* = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha^*$$

$$\beta^\vee = \sum_{\alpha\in\Delta} \frac{2c_\alpha}{(\beta,\beta)} \alpha^* = \sum_{\alpha\in\Delta} \frac{2c_\alpha}{(\beta,\beta)} \frac{(\alpha,\alpha)}{2} \alpha^\vee \qquad \underline{\text{ok}}$$

(2) $$\alpha_i = \sum_{t=1}^{\ell} c_t \omega_t \qquad \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = \sum_{t=1}^{\ell} c_t \langle \omega_t, \alpha_j^\vee \rangle = c_j$$

cioè le coord. di α_i risp. a $(\omega_1, \dots, \omega_\ell)$ sono le righe della matr. di Cartan.

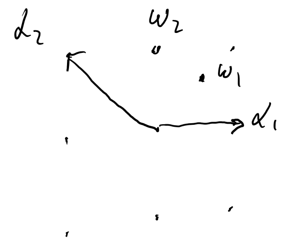
(3)



$$\omega_1 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \omega_1, \alpha_1^\vee \rangle = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 \qquad C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_1$$

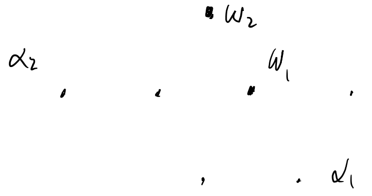


$$C_2 \quad \overset{\alpha_1}{\circ} \Leftarrow \overset{\alpha_2}{\circ} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle = -1 \qquad \langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle = -2$$

$$C^{-1} = \frac{1}{4-2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \qquad \langle \omega_1, \alpha_1^\vee \rangle = 2 - \frac{2}{2} = 1$$



$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \frac{1}{4-3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \qquad \omega_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$$

Es. 8: (1) $\omega_1 = \varepsilon_1 \qquad \omega_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \ldots, \quad \omega_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$

poss. supporre $(\alpha,\alpha) = 2$, allora $(\alpha^\vee, \alpha^\vee) = \frac{4}{(\alpha,\alpha)} = 2$, $\alpha^\vee = \alpha^*$

$\alpha_1^\vee = \varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*, \ldots, \alpha_n^\vee = \varepsilon_{n-1}^* - \varepsilon_n^*$ $\quad$ ((ε_i^*) = base duale di (ε_i))

(2) k^{n+1}, autovett. e_1, autoval. $\varepsilon_1 = \omega_1$

$(k^{n+1})^*$, autovett. e_{n+1}^* autoval. $-\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = \omega_n$

($X \in \mathfrak{sl}(n+1)$ agisce su $(k^{n+1})^*$ come $-{}^tX$)

(3) $k^{n+1} = V$, $U = V \otimes V \supseteq \tilde{U} = \{$ tensori antisimmetrici, es. $v = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \}$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & * & \cdots & * \\ 0 & x_{22} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & * \end{pmatrix}$$

$X.e_1 = x_{11} e_1 \qquad X.e_2 = x_{22} e_2 + x_{12} e_1$

$X.(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) = (X.e_1) \otimes e_2 + e_1 \otimes X.e_2 - (X.e_2) \otimes e_1 - e_2 \otimes X.e_1 =$

$= x_{11} e_1 \otimes e_2 + \cancel{e_1 \otimes x_{12} e_1} + e_1 \otimes x_{22} e_2 -$

$(\cancel{x_{12} e_1 \otimes e_1} + x_{22} e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes x_{11} e_1) =$

$(x_{11} + x_{22}) \underbrace{(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)}$

allora è $\mathcal{B}$-autovettore!

In gen. $$u = \sum_{i<j} c_{ij}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) \in \tilde{U}$$

$$x.u = \sum_{i<j} c_{ij}\Big(\underbrace{(x.e_i)\otimes e_j} + \underbrace{(e_i \otimes x.e_j)} - \underbrace{(x.e_j)\otimes e_i} - \underbrace{e_j \otimes (x.e_i)}\Big)$$

segue: $\tilde{U}$ è $\mathfrak{sl}(n+1)$-sottomodulo di $V\otimes V$.

Ha un $\mathfrak{b}$-autovett. di autovalore $\omega_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (x \longmapsto x_{11} + x_{22})$.

Da dim.: $\tilde{U}$ è irriducibile. Oss.: dato $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$ con $i \neq j$, consid. la matr. elem. $e_{ij} \in \mathfrak{sl}(n+1)$: vale

$$e_{ij}(e_i) = 0, \quad e_{ij}(e_j) = e_i$$

da cui $$e_{ij}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) = \cancel{e_{ij}(e_i) \otimes} e_j + e_i \otimes e_{ij}(e_j) -$$
$$- \left(e_{ij}(e_j) \otimes e_i + e_j \cancel{\otimes e_{ij}(e_i)}\right) = e_i \otimes e_i - e_i \otimes e_i = 0.$$

Inoltre $$e_{1i}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) = e_{1i}(e_i) \otimes e_j + e_i \cancel{\otimes e_{1i}(e_j)}$$
$$- \left(\cancel{e_{1i}(e_j) \otimes} e_i + e_j \otimes e_{1i}(e_i)\right) = e_1 \otimes e_j - e_j \otimes e_1$$

e analogam. $$e_{2j}(e_1 \otimes e_j - e_j \otimes e_1) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

Da questo segue: dato $u \in U$ come prima, con $u \neq 0$ usando e_{1i} e poi e_{2j} ottengo un vettore in U con $c_{12} \neq 0$. Inoltre usando e_{ij} con $(i,j) \neq (1,2)$ ottengo $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \in \tilde{U}$, e usando e_{i1} e anche e_{j2} ottengo $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \in \tilde{U}$ $\forall i \neq j$.

Quindi se $0 \neq u \in \tilde{\tilde{U}}$ = sottomodulo di $\tilde{U}$, abb. $\tilde{\tilde{U}}$ contiene una base di $\tilde{U}$, da cui $\tilde{\tilde{U}} = \tilde{U}$. Cioè $\tilde{U}$ è irriducibile.